Tentamen i Matematisk fysik FTF131

Måndagen 12 januari 2015

Examinator: Henrik Johannesson, tel. 0768-237042.
Inga hjälpmedel är tillåtna på denna tentamen.

Tentamen består av fem uppgifter där varje uppgift ger maximalt 5 poäng. Uppgifterna är inte avsiktligt ordnade efter svårighetsgrad.

Strukturera Dina lösningar noggrant. **Uppställda samband skall motiveras**, gärna med en översiktlig skiss av tankegång och bärande element! Alla väsentliga steg i analys och beräkningar skall redovisas.

---

1. Betrakta den tidsoberoende Schrödingerekvationen för en fri partikel med massan m och vågfunktionen ψ i en dimension:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi = E\psi.$$

a) Om $E < 0$ så finns det en unik Greenfunktion till problemet. Bestäm denna!

b) Undersök fallet $E > 0$. Är Greenfunktionen fortfarande unik? Diskutera!

2. Beskriv en metod att lösa integralekvationen

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^\pi \sin(x+t)\varphi(t)\, dt.$$

För vilka värden på λ existerar en lösning?

3. Baksidan av en flyghangar vetter mot en äng. I båda ändarna på hangarens baksida är ett säkerhetsstängsel med längd L fastsatt. Beskriv en metod att hitta den placering av stängslet som ger maximalt inhägnad area, givet att man till sitt förfogande har en remsa av ängen som är precis lika bred som hangarens baksida. Kan du konstruera den differentialekvation som löser problemet? (Du behöver inte lösa ekvationen.)

4. En Hermitesk operator $\mathcal{O}$ på $\mathcal{L}^2_{[a,b]}$ definieras av att

$$\langle \mathcal{O}\varphi \,|\, \psi \rangle = \langle \varphi \,|\, \mathcal{O}\psi \rangle,$$

där $|\,\varphi\,\rangle$ och $|\,\psi\,\rangle$ båda är element i $\mathcal{L}^2_{[a,b]}$, med $\varphi(a) = \varphi(b) = \psi(a) = \psi(b) = 0$. Visa att $P = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ är en Hermitesk operator på $\mathcal{L}^2_{]-\infty,\infty[}$.

5. a) Hur definieras *karaktärerna* till en representation av en grupp? Hur kan de användas för att identifiera de irreducibla representationer som bygger upp en given representation? Varför är detta intressant för en fysiker?

b) Betrakta tre-element gruppen $G = \{e, a, b\}$ med en representation D där

$$D(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D(a) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}, \quad D(b) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}.$$

Uppfyller D det fundamentala ortogonalitetsteoremet? Motivera ditt svar noga!

TENTAMEN MATEMATISK FYSIK FTF131 12/1 2015

LÖSNINGAR

1) $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) = E\psi(x)$, $E<0$

$$\Rightarrow \left(\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\right)k^2 + E\right)\overset{\text{F.T.}}{G(k,E)} = 1 \Rightarrow G(k,E) = \left(E - \frac{\hbar^2}{2m}k^2\right)^{-1}$$

$$\Rightarrow G(k,E) = -\frac{2m}{\hbar^2}\frac{1}{(k-k_+)(k-k_-)} \quad , \quad k_\pm = \pm i\sqrt{2m|E|}/\hbar$$

$$G(x,E) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}G(k,E)e^{ikx} = \left\{x>0 \Rightarrow \text{Jordankurva i övre halvplanet}\right\}$$

$$= -\frac{2m}{\hbar^2}2\pi i\frac{1}{2\pi}\operatorname{Res}\left[\frac{1}{(k-k_+)(k-k_-)}e^{ikx}\right]_{k=k_+}$$

$$= -\sqrt{\frac{m}{2}}\frac{1}{\hbar}\frac{e^{-(\sqrt{2m|E|}/\hbar)x}}{\sqrt{|E|}}.$$

2) $\varphi(x) = \lambda \int_0^{\pi} \underbrace{\sin(x+t)}_{\sin(x)\cos(t) + \cos(x)\sin(t)} \varphi(t)\,dt$ (1)

(separabel kärna)

$\Rightarrow \varphi(x) = \lambda \left(\sin x \underbrace{\int_0^{\pi} \cos(t)\varphi(t)\,dt}_{A} + \cos x \underbrace{\int_0^{\pi} \sin t\, \varphi(t)\,dt}_{B} \right)$

$\varphi(x) = \lambda A \sin x + \lambda B \cos x$

Sätt in i (1)!

$\lambda A \sin x + \lambda B \cos x = \lambda \int_0^{\pi} (\sin x \cos t + \cos x \sin t)(\lambda A \sin t + \lambda B \cos t)$

$\lambda \neq 0$

$\Rightarrow \lambda(A \sin x + B \cos x) = \lambda^2 \int_0^{\pi} \Big(A \sin(x) \cdot \tfrac{1}{2}\sin(2t) + B \sin(x) \cos^2(t) + B \cos(x) \cdot \tfrac{1}{2} \sin(2t) + A \cos(x)\tfrac{1}{2}\sin(2t) \Big)$

utför integrationen

$\Rightarrow A \sin x + B \cos x = \lambda \left(B \frac{\pi}{2} \sin x + A \frac{\pi}{2} \cos x \right)$

Jämför koefficienter!

$\begin{cases} A = \lambda B \frac{\pi}{2} \\ B = \lambda A \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow A = B$ om $\lambda = \frac{2}{\pi}$

$\Downarrow$

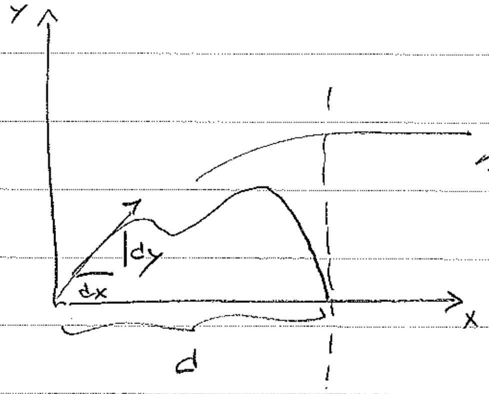
$\varphi(x) = C(\sin x + \cos x), \ \forall C$

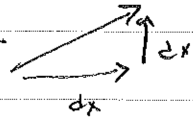
$\Rightarrow A = -B$ om $\lambda = -\frac{2}{\pi}$

$\Rightarrow \varphi(x) = C(\sin x - \cos x)$

$\Rightarrow$ Endast triviala lösningar för $\lambda \neq \pm \frac{2}{\pi}$

3)





$\sqrt{(dx)^2+(dy)^2} = dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

$$A = \int_0^d y(x)\,dx \quad \text{maximeras!} \qquad (1)$$

Villkor: $\int_0^d \sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx = L \qquad (2)$

Använd Lagrangemultiplikatorer:

$$\delta \int_0^d \underbrace{\left(y+\lambda\sqrt{1+y'^2}\right)}_{g(y,y') \Rightarrow \text{inget explicit } x\text{-beroende}} dx = 0$$

Beltrami identiteten $\quad g - \frac{\partial g}{\partial y'}\frac{dy}{dx} = C \Rightarrow y+\lambda\sqrt{1+y'^2} - \lambda\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2y'\cdot y' = C$

$$\Rightarrow y + \frac{\lambda}{\sqrt{1+y'^2}} = C$$

Separabel diff. ekv., kan skrivas:

$$\frac{\lambda}{C-y} = \sqrt{1+y'^2} \Rightarrow \frac{\lambda^2}{(C-y)^2} = 1+y'^2$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} - \sqrt{\frac{\lambda^2-(C-y)^2}{(C-y)^2}} = 0$$

4) Föreläsningsanteckningar !

5) a) — " —

(FOT)

b) D är ej irreducibel ! Fundamentala ortogonalitets-teoremet gäller för irreducibla representationer !

Välj $S = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$, $S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$

$$S D(a) S^{-1} \sim \left(\begin{array}{c|c} -1+i\sqrt{3} & 0 \\ \hline 0 & -1-i\sqrt{3} \end{array}\right) \Rightarrow \text{reducibla !}$$

$$S D(b) S^{-1} \sim \left(\begin{array}{c|c} -1-i\sqrt{3} & 0 \\ \hline 0 & -1+i\sqrt{3} \end{array}\right)$$

Explicit argument varför D ej uppfyller fundamentala ortogonalitetsteoremet :

$$\sum_{g\in G} \left(D^{(i)}_{\alpha\beta}(g)\right)^* D^{(j)}_{\gamma\delta}(g) = \frac{[G]}{n_i}\,\delta_{ij}\,\delta_{\alpha\gamma}\,\delta_{\beta\delta}$$

Vårt fall: $\sum_{g\in G} D_{\alpha\beta}(g)\, D_{\gamma\delta}(g) = \frac{3}{2}\,\delta_{\alpha\gamma}\,\delta_{\beta\delta}$

Välj $\alpha=\gamma=1$, $\beta=\delta=2$ $\Rightarrow 0 + \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{3} = 0$!

Skall vara $= \frac{3}{2}$ enl. FOT !